مقایسه و دقت‌سنجی روش قطعات افقی و قائم در تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی★

مهدی خداپرست(۱) مجتبی خاشعی(۲) رضامحمد مومنی(۳)

چکیده تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی، یکی از مباحث مهم در طراحی سدهای خاکی، راه‌ها، کانال‌ها و خاک‌ریزها است. یکی از روش‌های تحلیل پایداری شیروانی خاکی، تحلیل حدی بااستفاده از روش قطعات افقی و قائم است. در پژوهش حاضر، به‌منظور بررسی نتایج حاصل از روش قطعات افقی و قائم، ابتدا دو فرمول‌بندی از هر روش انتخاب، سپس ضریب اطمینان پایداری شیروانی بااستفاده از روش‌های مذکور برای تعدادی شیروانی محاسبه شده‌است. درادامه باتوجه به مقدار دقیق ضریب اطمینان پایداری، دقت‌سنجی روش‌های مذکور و مقایسهٔ نتایج آنها با یکدیگر انجام شده‌است. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر ضریب اطمینان روش قطعات قائم دقیق‌تر و با اندکی حاشیه اطمینان است درحالی‌که نتایج حاصل از روش قطعات افقی وابستگی زیادی به نوع فرمول‌بندی دارد. در مواردی که خاک دارای لایه‌بندی افقی است و یا در مسائل با نیروهای افقی، روش قطعات افقی سهولت بیشتری برای استفاده فراهم می‌نماید. درانتها پیشنهادهایی برای استفاده از روش قطعات ارائه شده‌است.

واژه‌های کلیدی شیروانی خاکی، تحلیل پایداری، ضریب اطمینان پایداری، روش قطعات افقی، روش قطعات قائم، دقت‌سنجی.

Horizontal and Vertical Slices Method, Compare and Evaluation of Exactitude of in Soil Slope Stability Analysis

M. Khodaparast M. Khashei R. M. Momeni

Abstract *Soil slope stability analysis, is one of the most important issues in the design of earth dams, roads, canals and levee. One of these methods is the limit equilibrium analysis with horizontal and vertical slices method.To evaluate the results of horizontal and vertical slice method in the calculation of stability safety factor, at first Two formulations of each method selected, then stability Safety factor has been achieved with the use of these methods for several slopes. The exact amount of stability safety factor by using of the analytical method has been obtained then the accuracy of the each method and comparison of their results with each other is studied.Considering studies at this research, concludes that at generally vertical slices method results exact and with a few confidence rand. Whereas horizontal slices method results have a relationship with selected formulation. In cases where the soil is layered horizontal or issues with horizontal forces, horizontal slices method provide greater ease of use. Finally, explained recommendations for using slice method.*

Key Words Soil slope, Stability analysis, Safety factor of stability, Horizontal slices method, Vertical slices method, Evaluation of exactitude.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۵/٦/٤ تاریخ پذیرش آن ۹٦/۹/۲۱ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، دانشیار دانشگاه قم، دانشکدهٔ فنی‌مهندسی، گروه مهندسی عمران. Email: Khodaparast@qom.ac.ir

(۲) کارشناس ارشد، دانشگاه قم، دانشکدهٔ فنی‌مهندسی، گروه مهندسی عمران.

(۳) دانشجوی دکتری دانشگاه قم، دانشکدهٔ فنی‌مهندسی، گروه مهندسی عمران.

مقدمه

تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی، یکی از مباحث مهم در طراحی سدهای خاکی، راه‌ها، کانال‌ها و خاک‌ریزها است. مسئلهٔ مهم دیگر در طراحی شیروانی خاکی بهینه بودن طرح ازنظر اقتصادی است. درصورتی‌که در مراحل طراحی ضرایب اطمینان بالایی برای شیروانی اعمال شود، می‌تواند در هزینهٔ نهایی پروژه تأثیر قابل‌توجهی داشته باشد که درمورد یک سد خاکی با حجم بسیار بالای عملیات خاکی، این مسئله اهمیت بیشتری خواهد داشت. بر این اساس بایستی روش‌هایی برای تحلیل پایداری شیروانی انتخاب شوند که هم از نقطه‌نظر پایداری و هم ازنظر اقتصادی قابل توجیه باشند.

برای محاسبات پایداری شیروانی‌های خاکی روش‌های زیادی وجود دارد که ممکن است نتایج حاصل از این روش‌ها درمقایسه با هم تفاوت‌هایی نیز داشته باشند. یکی از روش‌های متداول، تحلیل حدی شیروانی‌های خاکی بااستفاده از روش قطعات است. این روش با فرض این‌که شیروانی موردنظر در آستانهٔ لغزش قرار دارد، نیرو و لنگرهای مقاوم و محرک را برای به‌دست‌آوردن ضریب اطمینان پایداری شیروانی بررسی می‌کند. در این روش با درنظر گرفتن یک گوه لغزش فرضی و تقسیم آن به تعدادی قطعهٔ کوچک‌تر، اثر نیروهای مقاوم و محرک برروی هر یک از قطعات بررسی می‌شود و درنهایت با روی‌هم‌گذاری اثرات آنها، ضریب اطمینان پایداری شیب برای کل سطح لغزش محاسبه می‌شود. در این حالت بسته به این‌که قطعات موردنظر قائم یا افقی درنظر گرفته شوند روش محاسبه و فرمول‌بندی متفاوت خواهد بود.

درگذشته در ارتباط با مبانی و فرمول‌بندی روش قطعات افقی و قائم تحقیقاتی انجام شده‌است که درادامه مختصری از هر یک بیان می‌شود.

پژوهش انجام‌شده توسط شاهقلی و فاخر [1] منجر به معرفی و ارائهٔ فرمول‌بندی روش قطعات افقی بااستفاده از معادلات تعادل حدی شده‌است. در این مقاله ابتدا روی روش قطعات قائم، مجهولات روابط تعادل و روش‌های مختلف تعادل حدی (فلنیوس، بیشاپ و...) بحث شده‌است و درادامه روی روش قطعات افقی و روش‌های فرمول‌بندی 4N برای تعادل کلی و 2N+1 روی نیروهای افقی بحث شده‌است.

نوری و فاخر [2] در پژوهشی بااستفاده از روش قطعات افقی به بررسی پایداری شیروانی‌های خاکی مسلح حین زلزله پرداخته‌اند. در این تحقیق براساس نوع و تعداد معادلاتی که ارضا می‌شوند و نیز فرضیات ساده‌کننده‌ای که برای حل دستگاه معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرند، توسعه روش قطعات افقی با ۵ فرمول‌بندی ارائه شده‌است که شامل یک فرمول‌بندی ساده با ارضای تعادل لنگر (2N+1) (N تعداد قطعات مورد استفاده در تحلیل پایداری شیروانی)، دو فرمول‌بندی نسبتا کامل‌تر با ارضای تعادل نیروهای افقی و لنگر نیروها (3N,4N) یک فرمول‌بندی نسبتا کامل (5N-1) و یک فرمول‌بندی برای بررسی مسئلهٔ گسیختگی پیش‌رونده است، سپس بااستفاده از زبان برنامه‌نویسی فرترن برنامه‌ای برای هرکدام از فرمول‌بندی‌ها نوشته شده و برای یک شیب با مشخصات معین نتایج حاصل از هرکدام از فرمول‌بندی‌ها با نتایج حاصل از سه روش معتبر دیگر در حالت تعادل حدی مقایسه شده‌است.

فاخر و سربیشه‌ای [3] تحقیقی روی معادلات حاکم بر روش قطعات افقی برحسب روابط انرژی برای به‌دست‌آوردن توزیع شتاب افقی و نیروهای مسلح‌کننده‌ها در ارتفاع شیب‌های خاکی مسلح تحت شتاب زلزله انجام داده‌اند و در آن فرکانس پایهٔ شیب مسلح نیز بررسی شده‌است.

حاجی عزیزی و همکاران [٤] در پژوهشی بااستفاده از روش تعادل حدی و با فرض سطح گسیختگی دایره‌ای و غیردایره‌ای و نیز قطعاتی در امتداد شعاع سطح لغزش و یا امتدادی که به یک نقطه همگرا می‌شوند، معادلات تعادل نیروها و گشتاور را بدون هیچ‌گونه فرض ساده‌کننده‌ای به‌کار گرفته‌اند. درنظرگرفتن شکل قطعات به‌صورت قطاع، نوآوری تحقیق یاد شده‌است که موجب حذف‌شدن فرضیات متداول در روش تعادل حدی می‌شود، درنتیجه مقدار ضریب اطمینان با دقت بیشتری محاسبه شده‌است که مقدار آن نسبت به روش‌های دیگر

بیشتر است.

درگذشته، درزمینهٔ توسعهٔ فرمول‌بندی روش قطعات افقی و نیز کاربرد آن در تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی پژوهش‌هایی صورت گرفته‌است. لیکن درزمینهٔ مقایسه و دقت‌سنجی این روش با سایر روش‌ها ازجمله روش قطعات قائم پژوهش‌های کافی انجام نشده‌است.

هدف اصلی پژوهش حاضر مقایسهٔ نتایج تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی بااستفاده از روش قطعات افقی و قائم و دقت‌سنجی هریک از این روش‌ها است. بر این اساس پژوهش در گام‌های زیر دنبال شده‌است:

گام اول: در این مرحله از روش قطعات افقی دو فرمول‌بندی 2N و 2N+1 و از روش قطعات قائم، دو روش فلنیوس و بیشاپ به نمایندگی انتخاب‌شده‌اند و برنامه‌ای بااستفاده از نرم‌افزار اکسل برای محاسبهٔ ضریب اطمینان این روش‌ها نوشته می‌شود.

گام دوم: در این مرحله با انجام مطالعهٔ موردی برروی چند شیروانی با مشخصات هندسی و ژئوتکنیکی مشخص، ضرایب اطمینان پایداری حاصل از دو روش در حالت‌های مختلف بررسی می‌گردد.

گام سوم: در این مرحله باتوجه به مقادیر دقیق ضرایب اطمینان، نتایج قطعات افقی و قائم با یکدیگر و نیز با مقادیر دقیق مقایسه می‌شوند.

مبانی محاسبات پایداری شیروانی‌های خاکی

به‌طور کلی در طراحی شیروانی‌های خاکی باید ضریب اطمینان کافی برای پایداری شیروانی و نیز اقتصادی بودن طرح مدنظر قرار گیرد. نیروهای ثقلی و تراوش مهم‌ترین عامل اصلی برهم‌زنندهٔ پایداری شیب‌های طبیعی و غیرطبیعی می‌باشند. متداول‌ترین گسیختگی خاک در شیب‌ها عبارت‌اند از: ۱- لغزش چرخشی، ۲- لغزش انتقالی و ۳- لغزش مرکب. در لغزش‌های چرخشی سطح گسیختگی ممکن است دایره‌ای یا غیردایره‌ای باشد (لغزش‌های دایره‌ای در خاک‌های همگن و لغزش‌های غیردایره‌ای در خاک‌های غیرهمگن رخ می‌دهد). لغزش‌های انتقالی و مرکب درصورتی‌که مقاومت لایهٔ زیرین به‌طور فراوانی با لایهٔ رویی تفاوت داشته باشد رخ می‌دهند، همچنین لغزش‌های انتقالی در شرایطی که لایهٔ زیرین در عمق کمی از سطح شیب‌دار قرار گرفته باشد محتمل می‌باشند.

برای حل مسائل عملی، استفاده از روش‌های مبتنی بر تعادل حدی متداول است. در این حالت با فرض این‌که ناپایداری خاک در آستانهٔ وقوع است، از نسبت لنگر مقاوم به لنگر محرک، نیروی مقاوم به نیروی محرک و یا تنش مقاوم به تنش محرک (بسته به شرایط مسئله) برای محاسبهٔ ضریب اطمینان دربرابر ناپایداری سطوح گسیختگی فرضی استفاده می‌شود. از بین سطوح گسیختگی فرضی سطحی که ضریب اطمینان کمتری درمقابل لغزش داشته باشد، سطح گسیختگی احتمالی خواهد بود.

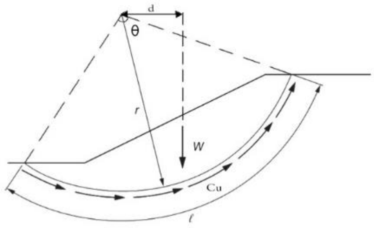
روش‌های محاسبهٔ پایداری شیروانی خاکی

روش‌های متعددی برای محاسبهٔ پایداری شیروانی‌های خاکی وجود دارد که باتوجه به شرایط مسئله و محدودیت‌های هر روش می‌توان مناسب‌ترین روش را انتخاب کرد. ازجملهٔ این روش‌ها می‌توان به روش ساده برای خاک‌های چسبنده، روش قطعات قائم، روش قطعات افقی و غیره اشاره کرد که درادامه به تشریح آنها پرداخته شده‌است.

روش ساده برای خاک‌های چسبنده. در این روش حل مسئله براساس تنش کل است؛ یعنی فرض بر این است که خاک صددرصد اشباع است و زهکشی نمی‌شود. این حالت به‌خصوص در کانال‌های خاکی آبیاری و یا سدهای خاکی که سطح آب به‌طور ناگهانی فروکش نماید اتفاق می‌افتد؛ زیرا با فروکش کردن ناگهانی سطح آب، آب فرصت زهکشی ندارد و می‌توان از روش ساده برای خاک‌های چسبنده ($\varphi=0$)، ضریب اطمینان درمقابل لغزش را محاسبه نمود.

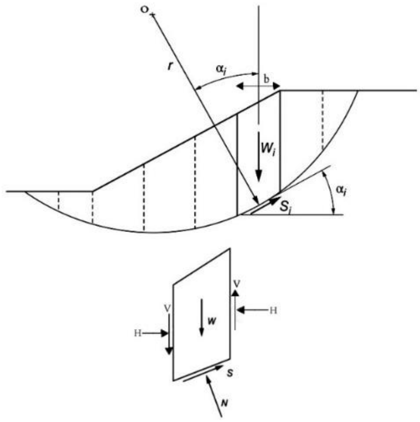
در این حالت ضریب اطمینان سطح لغزش برابر است با [۵ و ٦]:

$$F=\frac{M_r}{M_d}=\frac{C_u\times l\times r}{W\times d}=\frac{C_u\times r^2\times\theta}{W\times d} \qquad (۱)$$



شکل ۱ روش ساده برای خاک رسی همگن ($\varphi=۰$)

روش قطعات قائم. در این روش برای محاسبهٔ ضریب اطمینان پایداری ابتدا یک سطح لغزش فرضی انتخاب می‌شود و به قطعاتی قائم به‌عرض b تقسیم می‌گردد (شکل ۲). نیروهایی که به هر قطعه وارد می‌شوند عبارت‌اند از نیروی وزن هر قطعه که به دو مؤلفهٔ T و N تقسیم می‌شوند.



شکل ۲ روش قطعات قائم

با فرض این‌که W وزن قطعهٔ موردنظر باشد، نیروی N برابر است با W.cosα و عمود بر سطح قطعه است که از مرکز O می‌گذرد. نیروی S نیز برابر است با W.sinα و مماس بر سطح قطعه است. نیروهای بین‌قطعه‌ای با V و H نشان داده‌شده‌اند.

برای حل معادلات تعادل و محاسبهٔ ضریب اطمینان از روش قطعات قائم راه‌حل‌های مختلفی موجود است، ازجمله راه‌حل فلنیوس، بیشاپ، بیشاپ اصلاح‌شده، تیلور و غیره که در اینجا به دو روش از آنها اشاره شده‌است.

راه‌حل فلنیوس. در این روش سطح گسیختگی فرضی به تعدادی قطعه تقسیم می‌شود و برای حل دستگاه معادلات از نیروهای مماسی و قائم بین قطعات صرف‌نظر می‌شود. در روش مذکور پس از محاسبهٔ نیروی مقاوم برشی برای هر قطعه و گشتاور آن نسبت به مرکز چرخش، گشتاور نیروی محرک قطعه نیز نسبت به مرکز چرخش محاسبه می‌شود. درنهایت ضریب اطمینان برای هر قطعه برابر خواهد بود با [۵ و ٦]:

$$F=\frac{M_r}{M_d}=\frac{c\times\Delta l+N\times\tan\varphi}{T} \qquad (۲)$$

برحسب تنش مؤثر نیز مقدار ضریب اطمینان برابر است با [۵ و ٦]:

$$F=\frac{C'L+\tan\varphi'\sum\left(N-u\Delta l\right)}{\sum T} \qquad (۳)$$

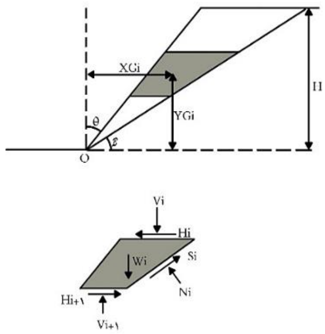
که در رابطهٔ (۳)، u فشار آب حفره‌ای است.

روش بیشاپ. بیشاپ برای حل دستگاه معادلات پایداری، فرض را بر این گرفته‌است که نیروهایی که بین قطعات عمل می‌کنند صرفا افقی‌اند یا به‌عبارت‌دیگر نیروهای عمودی بین‌قطعه‌ای برابر صفرند. در این روش بااستفاده از رابطهٔ (٤) و درنظر گرفتن فرض اولیه برای ضریب اطمینان، مقدار دقیق ضریب اطمینان پس از انجام چند مرحله سعی و خطا به‌دست خواهد آمد [۵ و ٦]:

$$F=\frac{1}{\sum W.\sin\alpha}\sum\left[\left\{c'.b+\left(w-u.b\right)\tan\varphi'\right\}\frac{\sec\alpha}{1+\frac{\tan\alpha.\tan\varphi'}{F}}\right] \qquad (٤)$$

روش قطعات افقی. از دیگر روش‌های تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی، روش تحلیل بااستفاده از قطعات افقی (HSM) است که در این روش سطح لغزش به تعدادی قطعهٔ افقی تقسیم می‌شود و نیروهای اعمالی بر هرکدام از قطعات مطابق شکل (۳) موردبررسی قرار می‌گیرد.

در شکل (۳)، β زاویهٔ شیب، H ارتفاع شیب، XGi و YGi مختصات مرکز سطح قطعهٔ موردنظر، N و S به‌ترتیب نیروهای عمودی و مماسی در سطح لغزش، V و H نیروهای عمودی و مماسی در سطح تماس بین دو قطعه، wi وزن قطعه و ky نیز ضریب شتاب زلزله است. معادلات تعادل برای روش قطعات افقی به‌صورت کامل به‌شرح جدول (۱) است.



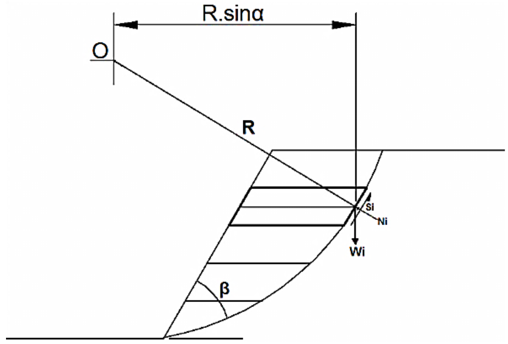
شکل ۳ روش قطعات افقی و نیروهای وارد بر هر قطعه

جدول ۱ معادلات تعادل برای هر قطعه و پارامترهای به‌کار گرفته‌شده در معادلات [۷]

شرح	معادلات
معادلهٔ تعادل نیرو درجهت افق برای هر قطعه	$\sum F_x = 0 \rightarrow$ $S_i\cos\beta - N_i\sin\beta - H_i + H_{i+1} - k_y W_i = 0$
معادلهٔ تعادل نیرو درجهت قائم برای هر قطعه	$\sum F_y = 0 \rightarrow$ $V_{i+1} - W_i - V_i + S_i + N_i\cos\beta = 0$
معادلهٔ تعادل لنگر حول نقطهٔ O (نقطهٔ اثر پای شیب) برای هر قطعه	$\sum M_O = 0 \rightarrow$ $H_i\sum_{j=1}^{n}(h_j) - H_{(i+1)}\sum_{j=1}^{n}(h_j) - V_i X_{(V_i)} + V_{(i+1)} X_{(V_{i+1})} - W_i(\bar{X}_i) + k_y W_i(\bar{Y}_i) + \frac{N_i}{\sin\beta}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j + \frac{h_i}{2}\right) = 0$
معادلهٔ موهر کلمب برای هر قطعه	$(S_i) - N_i\tan(\varphi) = 0$
h_i ارتفاع هر قطعه	$h_i = \frac{H}{n}$
X_{V_i} معادل بازوی لنگر نیروی عمودی V_i نسبت به نقطهٔ O	$X_{V_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} h_i\tan\theta}{2} + \frac{\sum_{j=1}^{n} h_i}{2\tan\beta}$
$\bar{X}_i$ فاصلهٔ افقی مرکز ثقل قطعه از نقطهٔ O	$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} h_j}{2\tan\beta} + \frac{\sum_{j=1}^{n} h_i\tan\theta}{2} - \frac{h_i}{4\tan\beta} - \frac{h_i\tan\theta}{4}$
$\bar{Y}_i$ فاصلهٔ عمودی مرکز ثقل قطعه از نقطهٔ O	$\bar{Y}_i = \left[\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} h_j}{\tan\beta} - \sum_{i=1}^{n} h_i\tan\theta\right) + h_i\tan\theta\right] h_i \times \left(\sum_{j=1}^{n} h_j + \frac{h_i}{2}\right) - \frac{h_i^2\tan\theta}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j + \frac{2h_i}{3}\right) - \frac{h_i^2}{2\tan\beta}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j + \frac{h_i}{3}\right)$

فرمول‌بندی 2N. در فرمول‌بندی2N با نوشتن معادلات تعادل نیرو در دو جهت x و y مقادیر نیروهای عمودی (N_i) و مماسی (S_i) در سطح لغزش محاسبه می‌شوند. در این حالت با فرض ساده‌کنندهٔ اعمال نیروی محرک حاصل از وزن قطعه در سطح لغزش می‌توان بااستفاده از رابطهٔ (۵) مقدار ضریب اطمینان را محاسبه کرد.

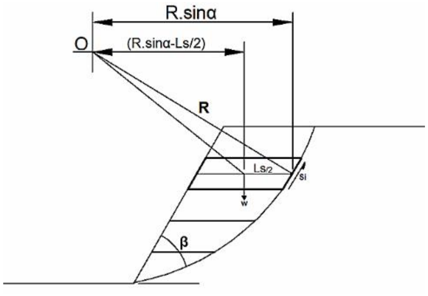
$$FS = \frac{\sum M_r}{\sum M_d} = \frac{\sum(Fr).R_r}{\sum(Fd).R_d} = \frac{CL_i + \sum N_i.(\tan\varphi)}{\sum T_i} \qquad (۵)$$



شکل٤ نیروها و بازوهای محرک و مقاوم در روش 2N

فرمول‌بندی 2N+1 در روش 2N+1 ابتدا با نوشتن معادلات تعادل نیرو در دو جهت x و y مقادیر نیروهای عمودی (N_i) و مماسی (S_i) در سطح لغزش محاسبه می‌شوند، سپس نیروی مقاوم در سطح لغزش و نیروی محرک W_i در مرکز هر قطعه اعمال می‌شود. در این حالت برای محاسبهٔ ضریب اطمینان از نسبت بین لنگرهای مقاوم و محرک با مرکز نقطهٔ O استفاده می‌شود. در این روش بازوی لنگرهای مقاوم و محرک متفاوت است به‌طوری‌که بازوی لنگر مقاوم برابر شعاع دایرهٔ لغزش و بازوی لنگر محرک مقداری کمتر ($R\sin\alpha - \frac{L_{si}}{2}$) می‌باشد. درنهایت مقدار ضریب اطمینان از رابطهٔ (٦) محاسبه می‌گردد.

$$FS = \frac{\sum M_r}{\sum M_d} = \frac{\sum(Fr).R_r}{\sum(Fd).R_d} = \frac{(CL_i + \sum N_i.(\tan\varphi)).R_r}{\sum(W_i).R_d} \qquad (٦)$$



شکل ۵ نیرو و بازوی لنگرهای مقاوم و محرک در روش 2N+1

سطح لغزش شیروانی خاکی. یافتن سطح لغزش واقعی، یکی از مشکلات اساسی در محاسبهٔ پایداری سطوح شیب‌دار است. برای محاسبهٔ ضریب اطمینان پایداری شیروانی‌ها، به‌عنوان اولین آزمون یک سطح لغزش فرضی، درنظر گرفته می‌شود و با تکرار آزمون و اصلاح، سطح لغزش بحرانی (سطحی که کمترین مقدار برای ضریب اطمینان را داشته باشد) تعیین می‌گردد. شکل این سطح لغزش عمدتا بستگی به نوع و شرایط خاک دارد.

درمورد روش قطعات، محققان روش‌های مختلفی را برای تعیین سطوح لغزش به‌کار برده‌اند که از آن‌جمله می‌توان به سطح لغزش اسپیرال لگاریتمی[8]، روش‌های مدرن بهینه‌سازی نظیر حرکت گروهی ذرات [9] و حرکت گروه ماهی [10]، روش الگوریتم ژنتیک [11]، سطح لغزش دایره‌ای [٤] و سطح لغزش مسطح [12] اشاره کرد.

روش تحقیق

کلیات انجام محاسبات. در تحقیق حاضر، ابتدا مقادیر ضریب اطمینان دربرابر لغزش، بااستفاده از دو روش قطعات قائم (روش فلنیوس و روش بیشاپ اصلاح‌شده) و روش قطعات افقی (فرمول‌بندی 2N و فرمول‌بندی 2N+1) برای چند شیروانی خاکی با مشخصات هندسی و ژئوتکنیکی مشخص، تعیین شده‌است. تحلیل پایداری شیب‌ها در حالت تعادل حدی، بافرض وجود خاک همگن، بدون درنظر گرفتن اثرات نیروی زلزله و فشار آب حفره‌ای انجام شده‌است.

در مرحلهٔ بعد مسئلهٔ مهمی به نام دقت‌سنجی روش‌های مذکور موردبررسی قرار گرفته‌است. در این قسمت، از روش‌های تحلیلی دقیقی برای محاسبهٔ ضریب اطمینان دربرابر پایداری شیروانی‌های خاکی استفاده شده‌است. سپس بااستفاده از نتایج این بخش، داده‌های چهار روش مذکور ازلحاظ دقت بررسی شده‌اند. همچنین درادامه برای آن‌که بتوان تفاوت روش‌های مختلف در تعیین مقدار ضریب اطمینان را بهتر مشاهده نمود، نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر چسبندگی ترسیم شده‌است. برای این منظور در نرم‌افزار، برای شیروانی مذکور با درنظر گرفتن مقادیر مشخص برای γ و همچنین φ، اثر تغییر مقدار چسبندگی بر ضریب اطمینان شیب در روش‌های مختلف، محاسبه شده‌است. همچنین به‌طور مشابه این کار برای پارامترهای دیگر نظیر وزن مخصوص و زاویهٔ اصطکاک داخلی خاک نیز انجام شده‌است.

روش انجام محاسبات

مسئله در چهار حالت بررسی شده‌است:

حالت لغزش انتقالی با سطح لغزش مسطح نامحدود. لغزش انتقالی معمولا در حالتی رخ می‌دهد که سنگ‌بستر در عمق کمی از سطح شیروانی، قرار داشته باشد. در این حالت مقدار ارتفاع بحرانی (ارتفاعی که شیب در آستانهٔ لغزش قرار دارد (Fs=1) برای یک شیب نامحدود با زاویهٔ β و پارامترهای ژئوتکنیکی (c,φ,γ) مشخص، بااستفاده از رابطهٔ (۷) قابل‌محاسبه است. پس از محاسبهٔ Hcr نیز مقدار ضریب اطمینان از روش قطعات با تقسیم سطح لغزنده به قطعات افقی و قائم، برای شیب موردبررسی محاسبه شده‌است.

$$Hcr=\frac{C}{\gamma.\cos\beta^2.(\tan\beta-\tan\varphi)} \qquad (۷)$$

حالت لغزش محدود با سطح لغزش مسطح. در این حالت فرض می‌شود که سطح گوهٔ لغزنده، مسطح است. مقدار ارتفاع بحرانی برای یک شیب با زاویهٔ β و پارامترهای ژئوتکنیکی (c,φ,γ) مشخص، از رابطهٔ (۸) قابل‌محاسبه است. پس از مشخص‌شدن ارتفاع بحرانی شیب و محاسبهٔ زاویهٔ سطح لغزش بحرانی، از دو روش قطعات افقی و قائم، مقادیر ضریب اطمینان پایداری شیب محاسبه شده‌است.

$$H_{cr}=\frac{4C}{\gamma}\left[\frac{\sin\beta.\cos\varphi}{1-\cos(\beta-\varphi)}\right] \qquad (۸)$$

حالت لغزش دایره‌ای در خاک چسبندهٔ همگن. برای خاک چسبنده (φ=0) و همگن، می‌توان سطح لغزش را قسمتی از یک دایره فرض کرد و مقدار دقیق ضریب اطمینان شیب، با زاویهٔ β و پارامترهای ژئوتکنیکی (c,φ,γ) مشخص را، محاسبه نمود. سپس به‌طور مجزا از روش‌های قطعات افقی و قائم نیز مقادیر ضریب اطمینان برای هر حالت قابل‌محاسبه است.

محاسبات فوق برای شیب با زاویه‌های مختلف ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه انجام شده‌است.

حالت لغزش دایره‌ای در خاک با چسبندگی و زاویهٔ اصطکاک داخلی. در این حالت، خاکی با مشخصات ژئوتکنیکی (c, φ, γ) مشخص درنظر گرفته‌شده و مقادیر ضریب اطمینان از دو روش کلی قطعات قائم و افقی محاسبه شده‌است.

تفسیر داده‌ها و مقایسهٔ نتایج

شیب در حالت لغزش انتقالی با سطح لغزش مسطح نامحدود. همان‌طور که در جدول (۲) مشخص شده‌است، مقدار ضریب اطمینان بااستفاده از روش دقیق برای حالت بحرانی (آستانهٔ لغزش) برابر با یک است. در این حالت ارتفاع بحرانی شیب (Hcr) بااستفاده از روابط بخش قبل محاسبه شده‌است و مقدار ضریب اطمینان

بااستفاده از دو روش قطعات قائم (روش فلنیوس) و روش قطعات افقی (روش ساده‌شده 2N) برای این شیب با پارامترهای هندسی و ژئوتکنیکی مشخص محاسبه شده‌است که نتایج حاصل به‌صورت زیر است.

جدول ۲ مقادیر ضریب اطمینان در شیب ۴۵ درجهٔ نامحدود با وزن مخصوص ۱,۸ تن بر مترمکعب، چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و زاویهٔ اصطکاک داخلی ۲۵ درجه

روش	ضریب اطمینان	اختلاف با روش دقیق برحسب درصد
مقادیر دقیق	۱	۰,۰
روش قطعات قائم	۱,۰۰۴	+ ۰,۴
روش قطعات افقی	۱,۰۰۴	+ ۰,۴

علت اصلی دقت روش‌ها در این حالت این است که به‌علت مسطح بودن سطح لغزش، مقادیر سطوح گوهٔ لغزنده به‌طور دقیق محاسبه می‌شود و تقریبی به‌خاطر وجود انحنا در سطح گوهٔ لغزنده وجود ندارد و درنتیجه مقدار وزن قطعات یا به‌عبارت‌دیگر مقدار نیروی محرک در روش قطعات به‌طور دقیق محاسبه می‌شود.

شیب در حالت لغزش محدود با سطح لغزش مسطح

در این حالت همانند شیب مستوی نامحدود محاسبات انجام شده و نتایج در جدول (۳) آمده‌است.

جدول ۳ مقادیر ضریب اطمینان در شیب ۴۵ درجهٔ محدود با وزن مخصوص ۱,۸ تن بر مترمکعب، چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و زاویهٔ اصطکاک داخلی ۳۰ درجه

روش	**ضریب اطمینان**	**اختلاف با روش دقیق برحسب درصد**
مقادیر دقیق	۱	**۰,۰**
روش قطعات قائم	۱,۰۰۰۳	**+۰,۰۳**
روش قطعات افقی	۱,۰۰۰۷	**+۰,۰۷**

در این حالت نیز همانند شیب مسطح نامحدود، به‌دلیل مسطح‌بودن سطح لغزش و محاسبهٔ دقیق نیروی وزن قطعه، نتایج روش‌ها نزدیک به‌هم است.

شیب در حالت لغزش دایره‌ای و خاک چسبندهٔ همگن (بدون زاویهٔ اصطکاک داخلی). در این حالت با فرض شیب ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه، مقادیر ضریب اطمینان برای شیروانی‌های خاکی موردنظر به‌دست آورده شده‌است. این مقادیر در حالت‌های مختلف با تغییر پارامترهای چسبندگی (c) و وزن مخصوص (γ) محاسبه شده‌اند. برای شیب ۶۰ مقادیر ضریب اطمینان در جداول شمارهٔ (۴ و ۵) آمده‌است.

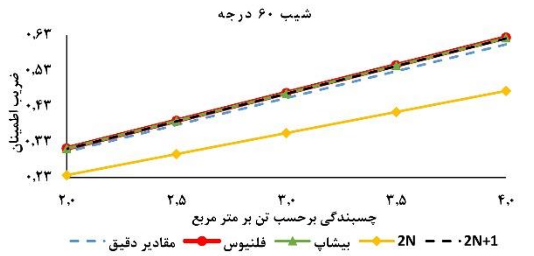
جدول ۴ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با وزن مخصوص ۱,۸ تن بر مترمکعب، بدون زاویهٔ اصطکاک داخلی و چسبندگی متغیر

روش		مقادیر چسبندگی برحسب تن بر مترمربع				
		C=۴	C=۳,۵	C=۳	C=۲,۵	C=۲
دقیق		۰,۶۰۳۹	۰,۵۲۸۴	۰,۴۵۲۹	۰,۳۷۷۴	۰,۳۰۱۹
قطعات قائم	فلنیوس	۰,۶۲۲۸	۰,۵۴۴۹	۰,۴۶۷۱	۰,۳۸۹۲	۰,۳۱۱۴
	بیشاپ	۰,۶۲۱۸	۰,۵۴۴۱	۰,۴۶۶۳	۰,۳۸۸۶	۰,۳۱۰۹
قطعات افقی	2N	۰,۴۷۲۸	۰,۴۱۳۷	۰,۳۵۴۶	۰,۲۹۵۵	۰,۲۳۶۴
	2N+1	۰,۶۲۰۳	۰,۵۴۲۸	۰,۴۶۵۲	۰,۳۸۷۷	۰,۳۱۰۱

جدول ۵ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با چسبندگی ۳ تن بر مترمربع، بدون زاویهٔ اصطکاک داخلی و وزن مخصوص متغیر

روش		مقادیر وزن مخصوص برحسب تن بر مترمکعب				
		γ=۲,۵	γ=۲,۲	γ=۲	γ=۱,۸	γ=۱,۵
دقیق		۰,۳۲۶۱	۰,۳۷۰۶	۰,۴۰۷۶	۰,۴۵۲۹	۰,۵۴۳۵
قطعات قائم	فلنیوس	۰,۳۳۶۳	۰,۳۸۲۲	۰,۴۲۰۴	۰,۴۶۷۱	۰,۵۶۰۵
	بیشاپ	۰,۳۳۵۸	۰,۳۸۱۵	۰,۴۱۹۷	۰,۴۶۶۳	۰,۵۵۹۶
قطعات افقی	2N	۰,۲۵۵۳	۰,۲۹۰۱	۰,۳۱۹۱	۰,۳۵۴۶	۰,۴۲۵۵
	2N+1	۰,۳۳۵۰	۰,۳۸۰۶	۰,۴۱۸۷	۰,۴۶۵۲	۰,۵۵۸۳

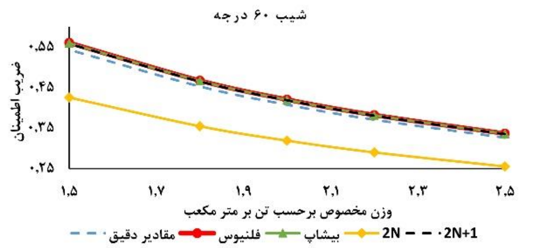
برای مقایسهٔ روش‌های مختلف در تعیین ضریب اطمینان پایداری، نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر چسبندگی در شکل (۶) ترسیم شده‌است.



شکل ٦ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر چسبندگی در خاک با شیب ٦۰ درجه و وزن مخصوص ۱٫۸ تن بر مترمکعب

باتوجه به شکل (٦)، با افزایش خطی مقدار چسبندگی، ضریب اطمینان به‌صورت خطی افزایش می‌یابد.

به‌صورت مشابه نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر وزن مخصوص خاک در شکل (۷) ترسیم شده‌است.



شکل ۷ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر وزن مخصوص در خاک با شیب ٦۰ درجه و چسبندگی ۳ تن بر مترمربع

باتوجه به شکل (۷)، با افزایش خطی مقدار وزن مخصوص خاک، ضریب اطمینان به‌صورت غیرخطی کاهش می‌یابد.

باتوجه به نتایج به‌دست‌آمده در این بخش، درصورت تحلیل پایداری شیروانی خاکی به‌روش قطعات افقی و استفاده از فرمول‌بندی 2N، به‌دلیل تقریب در نقطهٔ اثر نیروی محرک در این روش، نتایج حدود ۲۰ درصد نسبت به مقادیر واقعی کمتر هستند. فرمول‌بندی 2N+1 هم با این‌که ازنظر فرمول‌بندی در بین روش‌های قطعات افقی روشی کامل به‌شمار نمی‌آید ولی ازنظر دقت نتایج، با روش فلنیوس و در برخی از موارد با روش بیشاپ برابری می‌کند.

نکتهٔ حائز اهمیت دیگر این‌که، در این حالت با تغییر مقدار چسبندگی و وزن مخصوص خاک تغییری در میزان دقت روش‌های مورداستفاده ایجاد نمی‌شود و در حالات مختلف درصد اختلاف با مقادیر دقیق ثابت است.

درادامه در جدول (٦) مقادیر اختلاف ضریب اطمینان از روش‌های مختلف برحسب درصد بیان شده‌است. این مقادیر در حالت‌های مختلف با تغییر پارامترهای چسبندگی (c) و وزن مخصوص (γ) یکسان به‌دست آمده‌اند.

جدول ٦ مقادیر اختلاف نتایج شیب ٦۰ درجه

روش	اختلاف با مقادیر دقیق (برحسب درصد)
فلنیوس	۳٫۱
بیشاپ اصلاح‌شده	۳
افقی (2N)	-۲۱
افقی (2N+1)	۲٫۷

باتوجه به نتایج جدول (٦)، همان‌گونه که مشاهده شد در روش قطعات قائم، روش فلنیوس و بیشاپ اصلاح‌شده، دقت تقریبا یکسانی دارند و روش قطعات افقی روش 2N+1 دقتی نزدیک به‌روش قطعات قائم دارد.

به‌صورت مشابه مقادیر اختلاف روش‌های مختلف در تعیین ضریب اطمینان پایداری برای شیب‌های ۴۰ درجه و ۸۰ درجه در جداول (۷ و ۸) آمده‌است.

جدول ۷ مقادیر اختلاف نتایج شیب ۴۰ درجه

روش	اختلاف با مقادیر دقیق (برحسب درصد)
فلنیوس	۱
بیشاپ اصلاح‌شده	۱٫۳
افقی (2N)	-۱۸
افقی (2N+1)	۲٫٤

جدول ۸ مقادیر اختلاف نتایج شیب ۸۰ درجه

روش	اختلاف با مقادیر دقیق (برحسب درصد)
فلنیوس	۰,۳
بیشاپ اصلاح‌شده	۰,۵
افقی (2N)	-۱۱
افقی (2N+1)	۰,۳

شیب در حالت لغزش دایره‌ای در خاک با چسبندگی و زاویهٔ اصطکاک داخلی. در این حالت مقادیر ضرایب اطمینان از روش‌های قطعات قائم (فلنیوس و بیشاپ) و قطعات افقی (فرمول‌بندی 2N و فرمول‌بندی 2N+1) محاسبه و در جدول‌های (۹، ۱۰ و ۱۱) آورده شده‌است. شیب مفروض در این حالت شیب ۶۰ درجه با تقسیم گوهٔ لغزنده به ۵ قطعه می‌باشد. مقادیر ضریب اطمینان در این حالت با تغییر پارامترهای چسبندگی، وزن مخصوص و زاویهٔ اصطکاک داخلی خاک حاصل گردیده‌است.

جدول۹ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰درجه با وزن مخصوص۲ تن بر مترمکعب، زاویهٔ اصطکاک داخلی ۳۰ درجه و چسبندگی متغیر

روش		مقادیر چسبندگی برحسب تن بر مترمربع				
		C=٤	C=٣,٥	C=٣	C=٢,٥	C=٢
قطعات قائم	فلنیوس	١,٣٥٢٥	١,٢٨٢٤	١,٢١٢٣	١,١٤٢٣	١,٠٧٢٢
	بیشاپ	١,٣٨٩٤	١,٣٢٢١	١,٢٥٥٠	١,١٨٨٠	١,١٢١٢
قطعات افقی	2N	٠,٨٨٥٤	٠,٨٣٢٢	٠,٧٧٩٠	٠,٧٢٥٨	٠,٦٧٢٦
	2N+1	١,٢٤٩٢	١,١٧٩٤	١,١٠٩٦	١,٠٣٩٨	٠,٩٧٠٠

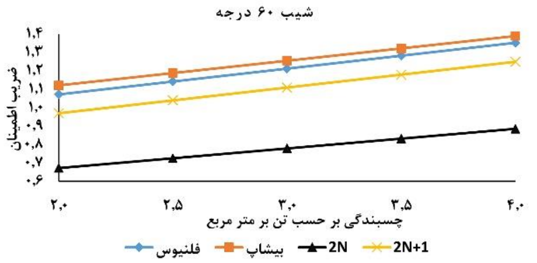
جدول ۱۰ مقادیر ضریب برای شیب ٦٠ درجه با چسبندگی۳ تن بر مترمربع، زاویهٔ اصطکاک داخلی ۳۰ درجه و وزن مخصوص متغیر

روش		وزن مخصوص برحسب تن بر مترمکعب				
		ɣ=٢,٥	ɣ=٢,٢	ɣ=٢	ɣ=١,٨	ɣ=١,٥
قطعات قائم	فلنیوس	١,١٢٨٣	١,١٧٤١	١,٢١٢٣	١,٢٥٩٠	١,٣٥٢٥
	بیشاپ	١,١٧٤٦	١,٢١٨٤	١,٢٥٥٠	١,٢٩٩٨	١,٣٨٩٤
قطعات افقی	2N	٠,٧١٥٢	٠,٧٥٠٠	٠,٧٧٩٠	٠,٨١٤٤	٠,٨٨٥٤
	2N+1	١,٠٢٥٨	١,٠٧١٥	١,١٠٩٦	١,١٥٦١	١,٢٤٩١

جدول ۱۱ مقادیر ضریب برای شیب ٦٠ درجه با چسبندگی۳ تن بر مترمربع، وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب و زاویهٔ اصطکاک داخلی متغیر

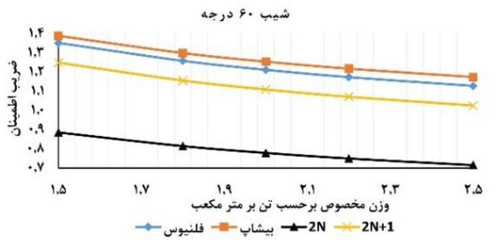
روش		مقادیر زاویهٔ اصطکاک داخلی برحسب درجه				
		Φ =٦٠	Φ =٥٠	Φ =٤٠	Φ =٣٠	Φ =20
قطعات قائم	فلنیوس	٢,٧٩٦١	٢,٠٥٥١	١,٥٧١٤	١,٢١٢٣	٠,٩١٩٦
	بیشاپ	٢,٩٦٤٤	٢,١٦٤١	١,٦٤٢٠	١,٢٥٥٠	٠,٩٤٠٤
قطعات افقی	2N	١,٦٩٨٧	١,٢٦٨٣	٠,٩٨٧٥	٠,٧٧٩٠	٠,٦٠٩٠
	2N+1	٢,٤٩١٢	١,٨٤٤٧	١,٤٢٢٨	١,١٠٩٦	٠,٨٥٤٢

برای آن‌که بتوان تفاوت روش‌های مختلف در تعیین مقدار ضریب اطمینان را بهتر مشاهده نمود، نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر چسبندگی، وزن مخصوص و زاویهٔ اصطکاک داخلی در شکل‌های (۸، ۹ و ۱۰) ترسیم شده‌است.



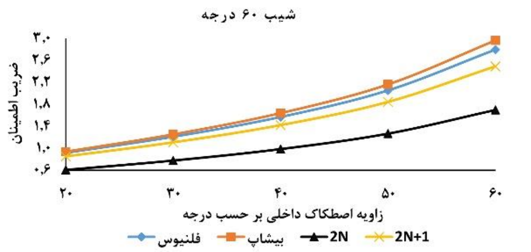
شکل ۸ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر چسبندگی در خاک با شیب ٦٠ درجه و وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب و زاویهٔ اصطکاک داخلی ۳۰ درجه

باتوجه به شکل (۸)، با افزایش خطی مقدار چسبندگی، ضریب اطمینان به‌صورت خطی افزایش می‌یابد.



شکل ۹ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر وزن مخصوص در خاک با شیب ٦٠ درجه و چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و زاویهٔ اصطکاک داخلی ۳۰ درجه

همان‌طور که در شکل (۹) مشخص است، با افزایش خطی مقدار وزن مخصوص خاک، ضریب اطمینان به‌صورت غیرخطی کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر زاویۀ اصطکاک داخلی در خاک با شیب ٦٠ درجه و چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب

همچنین باتوجه به شکل (۱۰)، با افزایش خطی مقدار زاویۀ اصطکاک داخلی خاک، مقدار ضریب اطمینان به‌طور غیرخطی افزایش می‌یابد. از سوی دیگر باتوجه به شکل‌های (۸، ۹ و ۱۰) مشابه قبل، از روش قطعات افقی 2N ضریب اطمینان کمتری به‌دست آمده‌است.

نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، به‌منظور بررسی تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی به روش قطعات افقی و قائم، دو فرمول‌بندی از هر روش انتخاب شد، سپس ضریب اطمینان پایداری شیروانی بااستفاده از روش‌های مذکور برای تعدادی شیروانی محاسبه گردید.

بررسی‌ها نشان داد، درحالتی‌که سطح لغزش مسطح باشد، بین نتایج روش دقیق، روش قطعات قائم و افقی اختلاف اندکی (حدود ۰٫٤ درصد) وجود دارد.

در حالت لغزش دایره‌ای در خاک چسبندۀ همگن (بدون زاویۀ اصطکاک داخلی)، درصورت استفاده از روش قطعات قائم، روش فلنیوس و بیشاپ اصلاح‌شده، دقت تقریبا یکسانی مشاهده شد و اختلاف نتایج آنها با مقدار دقیق اندک است و در صورت استفاده از روش قطعات افقی، در فرمول‌بندی 2N مقادیر ضریب اطمینان کمتر از مقادیر واقعی هستند و فرمول‌بندی 2N+1 ازنظر دقت نتایج، با روش فلنیوس و در برخی از موارد با روش بیشاپ برابری می‌کند. همچنین در این حالت با افزایش خطی مقدار چسبندگی، مقدار ضریب اطمینان به‌صورت خطی افزایش یافته و با افزایش خطی مقدار وزن مخصوص خاک، ضریب اطمینان به‌صورت غیرخطی کاهش یافته‌است.

در حالت لغزش دایره‌ای در خاک دارای چسبندگی و زاویۀ اصطکاک داخلی، ضریب اطمینان روش بیشاپ اصلاح‌شده بیشترین مقدار را دارد، بعدازآن ضریب اطمینان حاصل از روش فلنیوس و پس‌ازآن مقدار ضریب اطمینان به‌دست‌آمده از روش قطعات افقی 2N+1 قرار دارد. کمترین مقدار ضریب اطمینان نیز مربوط به روش ساده‌شدۀ قطعات افقی 2N است. در این حالت با افزایش خطی مقدار چسبندگی، مقدار ضریب اطمینان به‌صورت خطی افزایش یافته و با افزایش خطی مقدار وزن مخصوص خاک، مقدار ضریب اطمینان به‌صورت غیرخطی کاهش یافته‌است. همچنین با افزایش خطی مقدار زاویۀ اصطکاک داخلی خاک، مقدار ضریب اطمینان به‌طور غیرخطی افزایش یافته‌است.

به‌طورکلی روش قطعات قائم، نتایجی دقیق‌تر و با اندکی حاشیه اطمینان را برای شیروانی خاکی ارائه می‌دهد، این در حالی است که نتایج حاصل از روش قطعات افقی وابستگی زیادی به نوع فرمول‌بندی دارد. در روش قطعات افقی روش فرمول‌بندی 2N مقادیر کمتری را برای ضریب اطمینان پایداری شیروانی نشان می‌دهد، درحالی‌که روش 2N+1 که ازلحاظ فرمول‌بندی جزو روش‌های پیشرفتۀ قطعات افقی هم نیست، نتایج قابل قبولی (نزدیک به نتایج روش قطعات قائم) ارائه می‌دهد. با انتخاب فرمول‌بندی مناسب، روش قطعات افقی می‌تواند دقت بالایی داشته باشد و باید توجه داشت در مواردی که خاک دارای لایه‌بندی افقی است و یا در مسئلۀ نیروهای افقی (مانند وجود سخت‌کنندۀ افقی یا مؤلفۀ افقی نیروی زلزله و...) وجود دارد، روش قطعات افقی سهولت بسیار بالاتری برای استفاده فراهم می‌کند.

مراجع

1. Shahgholi, M., Fakher, A. and Jones, C.J.F.P., "Horizontal Slice Method of Analysis", Geotechnique, Vol. 51 (10), Pp. 881–885, (2001).
2. Nouri, H.R., Fakher, A. and Jones, C.J.F.P., "Development of Horizontal Slice Method in Stability Analysis of Reinforced Slopes", *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 24, No. 3, pp. 175–18, (2006).
3. Sarbi shei S. and Fakher A.,"Energy-based Horizontal Slice Method for Pseudo-static Analysis of Reinforced Walls", *Geosynthetics International*, Vol. 19, (2012).

٤. حاجی عزیزی، م.، کیلانه‌ئی، ف.، کیلانه‌ئی، پ.، «ارائهٔ روشی جدید در تحلیل پایداری شیب‌های خاکی بااستفاده از روش تعادل حدی»، مجلهٔ عمران شریف، پذیرفته‌شده برای چاپ، تهران، (۱۳۹۵).

۵. خرقانی، س.، «مهندسی سدهای خاکی»، چاپ اول، انتشارات دانشگاه صنعت آب و برق شهید عباسپور، (۱۳۸۳).

٦. وفاییان، م.، «سدهای خاکی و سنگ‌ریز»، چاپ اول، انتشارات ارکان دانش، (۱۳۹۱).

۷. عباسی، ع.، حسنلو، م.، حسنلوراد، م.، «تحلیل حدی شیروانی‌های خاکی مسلح به‌روش قطعات افقی»، اولین کنفرانش ملی مهندسی ژئوتکنیک ایران، اردبیل، (۱۳۹۲).

8. Morgenstern, N.R. and Price, V.R., "The Analysis Stability of General Slip Surfaces", Geotechnique, Vol. 15, No. 1, pp. 79–93, (1965).
9. Cheng, Y.M., Liang, L., Chi, S. and Wei, W.B., "Particle Swarm Optimization Algorithm for the Location of the Critical Non-circular Failure Surface in Two-dimensional Slope Stability Analysis", Computers and Geotechnics, Vol. 34, pp. 92–103, (2007).
10. Cheng, Y. M., Liang, L., Chi, S.C. and Wei, W. B., "Determination of the Critical Slip Surface,Using Artificial Fish Swarms Algorithm", ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental, Engineering, Vol. 134, No. 2, pp. 244-251, (2008).
11. Zheng, H., Sun, G. and Liu, D., "A Practical Procedure for Searching Critical Slip Surfaces of Slopes Based on the Strength Reduction Technique", Computers and Geotechnics, Vol. 36, pp. 1–5, (2009).

۱۲. کشاورز، ا.، شیدفر، ن.، «بررسی پایداری شبه‌استاتیکی شیب‌های خاکی مسلح بااستفاده از روش قطعات افقی با فرض لغزش صفحه‌ای»، هفتمین کنگرهٔ ملی مهندسی عمران، زاهدان، (۱۳۹۲).